数理解析研究所講究録
698巻 1989年 14-35

半線型高階放物型方程式の大域解について

早大 理工 星野 弘喜 (Hiroki Hoshino)
早大 理工 山田 義雄 (Yoshio Yamada)

§0. 序 Ωを$\mathbb{R}^n$の有界領域とし，境界$\partial\Omega$は滑らかとする．

$$L = L(x, D) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

をΩで定義された$2m$階楕円型作用素とし，

$$B_j = B_j(x, D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu, \quad j = 1, 2, \cdots, m$$

を$\partial\Omega$で定義されたm_j階微分作用素とする．但し$m_j < 2m$．

次の半線型放物型初期値－境界値問題の大域解の存在を$L^p(\Omega)$で考える：

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + Lu = f(D^{\alpha_1}u, D^{\alpha_2}u, \cdots, D^{\alpha_N}u), & x \in \Omega,\ t > 0 \\ B_j u = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(\cdot, 0) = \phi & x \in \Omega \end{cases}$$

作用素Aを

$$D(A) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega) : B_j u = 0 \text{ on } \partial\Omega,\ j = 1, 2, \cdots, m\}$$

$$Au = Lu \quad \text{for all } u \in D(A)$$

と定義する．(P)を次の様に書き直す：

$$(P') \quad \begin{cases} u_t + Au = f(u) \quad , \quad t > 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$

但し(P)の右辺を$f(u)$と略記し，以下もそのようにする．e^{-tA}が解析的半群になる場合を考える．

$L^p(\Omega)$における放物型初期－境界値問題の大域解の存在はFriedman [1], Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5], Rothe [8] 等で研究されている．Rothe [8] は2階で$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$の場合に限り議論している．ここで$\mathrm{Re}\,\sigma(A)$はAのスペクトルの実部を意味する．Henry [3], Ito [4], Kielhöfer [5] は$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$に制限しないで"安定多様体"を構成している．すなわち(P′)の定常解の安定性を論じている．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$のとき$\phi \in D(A^\theta)$とし(但し，$\theta \geqq 0$)，$f$は$\nu > 1$，$0 \leqq \alpha < 1$，$v, w \in D(A^\alpha)$に対して

$$\| f(v) - f(w) \|_p \leqq \mathrm{const.} \left(\| A^\alpha v \|_p + \| A^\alpha w \|_p \right)^{\nu - 1} \| A^\alpha v - A^\alpha w \|_p$$

$$f(0) = 0$$

を満たすとする．Henry [3], Kielhöfer [5] 等は$\alpha \leqq \theta$の場合の一般論を確立している．ここでは$0 \leqq \theta \leqq \alpha$の場合の(P′)の大域解の存在，自明解の安定性について考察する．我々はKielhöfer [5] と比較してαのとり得る範囲を広げることができ，αのとり方に対してのνの依存性を明らかにすることができた．詳しくは§1で述べる．Ito [4] は$\alpha = 0$であるが$\mathrm{Re}\,\sigma(A) \ni 0$の場

合も含めて安定性を論じている。我々は解のL^p-ノルムのexponential decayを出す為に$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$とする。

§1では仮定と結果―$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$のときの局所解，大域解の存在，$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$のときの安定多様体の構成―を述べる。§2ではいくつかの補題を準備する。§3では$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$の場合の定理の証明を行う。§4では$\mathrm{Re}\,\sigma(A)\not\ni 0$の場合の定理の証明を行う。安定多様体の正の不変性も得られるが，Hashimoto-Niikura-Yamada [2]で使われた方法を参考にした。我々は，自明解の安定性を調べているが，u^*を

$$v_t + Av = g(v),\ t>0,\quad v(0)=\phi$$

の定常解とし，$u\equiv v-u^*$, $f(u)\equiv g(v)-g(u^*)=g(u+u^*)-g(u^*)$とおいて仮定を満たすとき，$u^*$の安定性もいえる。

なお，Weissler [10]の局所解の存在の一部の結果を含んでいることに注意しておく（$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_N=0$, $\theta=0$）。

§1. 仮定，結果

仮定1.1 （L, B_jについて）

(i) $|\mu|=2m$のときa_μは$\overline{\Omega}$で有界，一様連続，$|\mu|<2m$のときa_μはΩで有界可測．

(ii) $|\mu|\leqq m_j$なるμに対し$b_{j\mu}\in C^{2m-m_j}(\partial\Omega)$, $|\gamma|\leqq 2m-m_j$なる任意のγに対し$D^\gamma b_{j\mu}$は$\partial\Omega$上で有界，一様連続．

(iii) LはΩで一様楕円型，適正楕円型，$\overline{\Omega}$上で強楕円型．

(iv) 任意の$x \in \Omega$に対し$L(x, D)$，$\{B_j(x, D)\}_{j=1,2,\cdots,m}$は補完条件を満足する．

(v) $\mathcal{L}(x, D_x, D_t) \equiv L(x, D_x) - (-1)^m e^{i\theta} D_t^{2m}$　としたとき任意の$\theta \in [\pi/2, 3\pi/2]$に対し$\mathcal{L}(x, D_x, D_t)$，$\{B_j(x, D)\}_{j=1,2,\cdots,m}$は補完条件を満足する．

以上は田辺[9]による．簡単の為に非線型項fに対して次の仮定をおく：

<u>仮定 1.2</u>（fについて）　$C_0 > 0$，$\nu > 1$とする．

(i) $0 \leqq |\alpha_1| \leqq |\alpha_2| \leqq \cdots \leqq |\alpha_N| = l < 2m$

(ii) $|f(v) - f(w)| \leqq C_0 \sum_{k=1}^{N} \left(|D^{\alpha_k} v| + |D^{\alpha_k} w|\right)^{\nu-1} |D^{\alpha_k} v - D^{\alpha_k} w|$

(iii) $f(0) = 0$

[9]及び仮定1.1により$-A$は解析的半群e^{-tA}を生成する．

(P')の代わりに積分方程式

$$(\mathrm{IE}) \qquad u(t) = e^{-tA}\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds, \quad t > 0$$

の局所解，大域解の存在を考えていく．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$のときは$\gamma > 0$に対し作用素$A$の分数巾$A^\gamma$を定義することができる：

$$A^{-\gamma} \equiv \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^\infty t^{\gamma-1} e^{-tA}\,dt$$

$$A^\gamma \equiv (A^{-\gamma})^{-1}, \qquad D(A^\gamma) = R(A^{-\gamma})$$

$D(A^\gamma)$は$L^p(\Omega)$で稠密である．

$\mathrm{Re}\,\sigma(A)>0$ のとき(IE)を解く空間を設ける為にAの分数巾を用いる．pのとり方として次の様にする：

(1.1)　$p\in(1,\infty)$ かつ $p>\dfrac{n(\nu-1)}{(2m-l)\nu}$

§0で出てきた$\alpha,\theta\in\mathbb{R}$については

(1.2)　$\dfrac{n(\nu-1)}{2mp\nu}+\dfrac{l}{2m}<\alpha<1$

(1.3)　$0\leqq\theta\leqq\alpha,\ 1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)\geqq0,\ (\alpha-\theta)\nu<1$

となるよう選ぶ。

(1.3)により，α,θについて

$$\alpha\nu>1 \text{ のとき } \frac{\alpha\nu-1}{\nu-1}\leqq\theta\leqq\alpha$$

$$\alpha\nu=1 \text{ のとき } 0<\theta\leqq\alpha$$

$$\alpha\nu<1 \text{ のとき } 0\leqq\theta\leqq\alpha$$

という関係を得る．初期値ϕについて$\phi\in D(A^{\theta})$とする．

p,αのとり方について注意しておく．(1.2)より

$$l-\frac{n}{p\nu}<2m\alpha-\frac{n}{p}$$

であるから$D(A^{\alpha})\subset W^{l,p\nu}(\Omega)$が成立する([3],[7])：

$$\|u\|_{W^{l,p\nu}}\leqq C_1\|A^{\alpha}u\|_p \qquad \text{for any } u\in D(A^{\alpha})$$

(1.2)を満たすαがとれる為のpの条件として

$\dfrac{n(\nu-1)}{2mp\nu}+\dfrac{l}{2m}<1$，すなわち(1.1)を設ける．

[5]ではαのとり方は$\dfrac{n}{2mp}+\dfrac{l}{2m}<\alpha<1$であり，また$\phi\in D(A^{\alpha})$である．我々は上で述べたことからわかるように$\alpha$の範囲を広げることができ，初期値のとれる範囲も広げることができ

たのが改良点である。

$t \in [0, \infty)$ に対し関数 $g(t)$ を $g(t) \equiv \min\{1, t\}$ と定義する。これは[8]による。大域解の存在を示す為，定数を t に依存させない為に用いる。

<u>定理1</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \lambda > 0$ とする。ある $T \in (0, \infty)$ に対し $[0, T]$ 上で（IE）の解 u が存在する。$u \in C((0,T];D(A^\alpha)) \cap C([0,T];D(A^\theta))$ で一意、任意の $\beta \in [\theta, 1)$ に対し

(1.4)　$\| A^\beta u(t) \|_p \leqq C_2(\beta)\, g(t)^{-(\beta-\theta)}\, e^{-\lambda t}, \quad t \in (0, T]$

<u>系</u>　（IE）の解は (P') の解，従って定理1が (P') について成立。

<u>注意</u>　然るべき条件の下で (P') の解は (P) を満たす，すなわち古典解にもなる。

<u>定理2</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \lambda > 0$ とする。$\| A^\theta \phi \|_p$ が十分小さいならば（IE）の解が $[0, \infty)$ 上で存在する。(1.4) が $t \in (0, \infty)$ について成立する。

<u>定理3</u>　$\mathrm{Re}\,\sigma(A) \neq 0$ のときは安定多様体 M が存在する。$\phi \in M$ ならば（IE）の大域解 u が存在し，$t \to \infty$ とするとき $\| u(t) \|_p \to 0$ であり，任意の $t \geqq 0$ に対し $u(t) \in M$。

以下，C_0, C_1, C_2 を含め正定数 C_k は t, T には依存しない。

§2. 準備

ここでは $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > \lambda > 0$ とする。証明は省略する。

補題 2.1　(i) $A^\gamma e^{-tA} = e^{-tA} A^\gamma$ on $D(A^\gamma)$

(ii) $\gamma \geqq 0$, $v \in L^p(\Omega)$ とするとき

$$\| A^\gamma e^{-tA} v \|_p \leqq C_3 t^{-\gamma} e^{-\lambda t} \| v \|_p \leqq C_3 g(t)^{-\gamma} e^{-\lambda t} \| v \|_p$$

(iii) $v \in D(A^\gamma)$ ならば $\| (e^{-tA} - I) v \|_p \leqq C_4 t^\gamma \| A^\gamma v \|_p$

補題 2.2　$v \in L^p(\Omega)$, $\gamma \geqq 0$ とする. $t \to 0$ とするとき

$$g(t)^\gamma e^{\lambda t} \| A^\gamma e^{-tA} v \|_p \longrightarrow 0$$

補題 2.3　任意の $v, w \in D(A^\alpha)$ に対し

$$\| f(v) - f(w) \|_p \leqq C_5 \left(\| A^\alpha v \|_p + \| A^\alpha w \|_p \right)^{\nu - 1} \| A^\alpha v - A^\alpha w \|_p$$

補題 2.4　$a \in \mathbb{R}$, $b, c \in [0, 1)$, $\rho \in (0, \infty)$ とする. $t > 0$ に対し

$$G(t) \equiv g(t)^a \int_0^t g(t-s)^{-b} g(s)^{-c} e^{-\rho s} ds$$

と定義するとき $G(t) \leqq C(b, c, \rho)\, g(t)^{1+a-b-c}$

§3. $\mathrm{Re}\,\sigma(A) > 0$ の場合：定理 1, 2 の証明

（定理 1 の証明）　補題 2.1 (ii) に注意し, 任意の $\beta \in [\theta, 1)$ に対して次の空間を設定する：

$$E_{\beta,T} \equiv \left\{ u \in C((0,T]; D(A^\beta)) : \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta u(t) \|_p < \infty \right\}$$

$$= \left\{ u : g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} u(t) \in B((0,T]; D(A^\beta)) \right\}$$

$E_{\beta,T}$ は $|||u|||_{\beta,T} \equiv \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^\beta u(t) \|_p$ をノルムとして Banach 空間になる. 特に $E_{\alpha,T}$ の閉球

$$B_T \equiv \{ u \in E_{\alpha,T} : |||u|||_{\alpha,T} \leqq C \}$$

を考える. C, T はあとで決定する.

$u \in B_T$ に対し写像Fを次の様に定義する：

(3.1) $\quad Fu(t) \equiv e^{-tA}\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\,ds, \quad t \in (0,T]$

(i) $A^{\beta}Fu(t)$ は $t \in (0,T]$ について（Hölder-）連続であることを示す．$0 < t < t+h \leqq T$ とし，$\delta \in (0, 1-\beta)$ とする．(3.1)より，補題2.1，2.3，2.4を用い，B_T の定義に注意して

$$
\begin{aligned}
&\| A^{\beta}Fu(t+h) - A^{\beta}Fu(t) \|_p \\
&\quad \leqq C_3 C_4 h^{\delta} g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} \| A^{\theta}\phi \|_p \\
&\qquad + \frac{C_3 C_5 C^{\nu}}{1-\beta} h^{1-\beta} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t} \\
&\qquad + C_6 h^{\delta} g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$

(ii) $F : B_T \to B_T$ であることを調べる．(3.1) より

$$
\begin{aligned}
&g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} Fu(t) \|_p \\
&\quad \leqq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} e^{-tA}\phi \|_p \\
&\qquad + C_3 C_5\, g(t)^{\beta-\theta} \int_0^t g(t-s)^{-\beta} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda(\nu-1)s}\,ds \cdot |||u|||_{\alpha,T}^{\nu} \\
&\quad \leqq g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} e^{-tA}\phi \|_p + C_7(\beta)\, g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^{\nu}
\end{aligned}
$$

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) \geqq 0$ であるから

(3.2) $$|||Fu|||_{\beta,T} \leqq \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} e^{-tA}\phi \|_p + C_7(\beta)\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^{\nu}$$

特に $\beta=\alpha$ とおいて

$$|||Fu|||_{\alpha,T} \leqq \sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha} e^{-tA}\phi \|_p + C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} |||u|||_{\alpha,T}^{\nu}$$

よって

(3.3) $\displaystyle\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha} e^{-tA} \phi \|_p + C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leqq C$

ならば $F : B_T \to B_T$ である.

(iii) Fは B_T 上の *strictly contraction* を示す. $v, w \in B_T$ とする.

(3.1), 補題2.1, 2.3, 2.4より

(3.4) $|||Fv - Fw|||_{\alpha,T} \leqq C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} |||v - w|||_{\alpha,T}$

となるので

(3.5) $C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} (2C)^{\nu-1} < 1$

となるようにC, Tをとれば(3.4)より示される. $\phi \in D(A^{\theta})$ だから補題2.1により

$$g(t)^{\beta-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\beta} e^{-tA} \phi \|_p \leqq C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$$

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) > 0$ の場合, (3.3)の代わりにより弱い条件

(3.3′) $C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p + C_8\, g(T)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} C^{\nu} \leqq C$

を扱う. $C > C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$ (例えば $C = 2C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$)とCをとると, Tを小さくとることにより(3.3′), (3.5)は成り立つ.

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1) = 0$ の場合, (3.3), (3.5)は

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta}\phi) \|_p + C_8 C^{\nu} \leqq C$$

$$C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$$

となる. $C>0$ を $C_8 (2C)^{\nu-1} < 1$ となるようにとり, 補題2.2よりTを十分小さくして

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta} e^{\lambda t} \| A^{\alpha-\theta} e^{-tA} (A^{\theta}\phi) \|_p \leqq C - C_8 C^{\nu}$$

を満足するようにとる.

どちらの場合でも(3.4)によってFはB_T上の strictly contraction になるから，FはB_T内に一意の不動点uをもち，$t\in(0,T]$について(IE)を満たす．$g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}u(t)\in B((0,T];D(A^\alpha))$.

(iv) $t=0$における連続性を調べる．$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)>0$ の場合(IE)，補題2.1，2.3，2.4及びB_Tの定義により

$$\begin{aligned}
&\|A^\theta u(t)-A^\theta\phi\|_p\\
&\quad\leqq \|A^\theta e^{-tA}\phi-A^\theta\phi\|_p+\int_0^t\|A^\theta e^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds\\
&\quad\leqq \|e^{-tA}A^\theta\phi-A^\theta\phi\|_p+C_9\,g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)}\to 0\ (t\to 0)
\end{aligned}$$

故に任意の$\gamma\in[0,\theta]$に対し $u\in C([0,T];D(A^\gamma))$.

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)=0$の場合，$T_0\in(0,T]$に対し(3.2)に注意して

$$|||u|||_{\alpha,T_0}\leqq\sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^\alpha e^{-tA}\phi\|_p+C_8C^{\nu-1}|||u|||_{\alpha,T_0}$$

$C_8C^{\nu-1}<1$ だから $C_{10}>0$ が存在して

$$|||u|||_{\alpha,T_0}\leqq C_{10}\sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^\alpha e^{-tA}\phi\|_p$$

が成り立つ．よって $T_0\to 0$ のとき補題2.2を用いて

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\|A^\theta e^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds\\
&\quad\leqq C_3C_5C^{\nu-1}\int_0^t g(t-s)^{-\theta}g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds\cdot|||u|||_{\alpha,T_0}\\
&\quad\leqq C_{11}C_{10}\sup_{0<t\leqq T_0}g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^{\alpha-\theta}e^{-tA}(A^\theta\phi)\|_p\to 0
\end{aligned}$$

従って任意の$\gamma\in[0,\theta]$に対し $u\in C([0,T];D(A^\gamma))$.

(v) $u(t)$の評価を求める．(3.2)に注意して

$$|||u|||_{\beta,T}\leqq C_3\|A^\theta\phi\|_p+C_7(\beta)C^\nu$$

であるから(1.4)が成立する．特に

$$\| A^{\alpha} u(t) \|_p \leqq C\, g(t)^{-(\alpha-\theta)} e^{-\lambda t} \quad \textit{for} \quad t \in (0, T]$$

<u>命題3.1</u>　$f(u(t))$ は $t \in (0, T]$ について Hölder 連続.

（証明）　定理1の証明の(i)と同様に $\beta = \alpha$ とし, $\delta \in (0, 1-\alpha)$, $0 < t < t+h \leqq T$ とする.

$$\| A^{\alpha} u(t+h) - A^{\alpha} u(t) \|_p$$
$$\leqq C_{12} h^{\delta} g(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} e^{-\lambda t} + C_{13} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda t}$$

従って仮定1.2より

(3.6)　$\| f(u(t+h)) - f(u(t)) \|_p$
$$\leqq C_{14} h^{\delta} g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} e^{-\lambda\nu t} + C_{15} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\lambda\nu t}$$

<u>注意</u>　Pazy [6] により命題3.1から (IE) は $t \in (0, T]$ について微分可能, すなわち(P′)について定理1が成立する.

<u>命題3.2</u>　$t \in (0, T]$ に対し

(3.7)　$\| A u(t) \|_p \leqq C_{16} [g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$

(3.8)　$\| u_t(t) \|_p \leqq C_{16} [g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}] e^{-\lambda t}$
$$+ C_5 C^{\nu} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\lambda\nu t}$$

（証明）　$g(t)^{1-\theta} e^{\lambda t} \| A e^{-tA} \phi \|_p \leqq C_3 \| A^{\theta} \phi \|_p$

である. 続いて次の様に分けて考える:

$$A \int_0^t e^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds$$
$$= \int_0^{t/2} A e^{-(t-s)A} f(u(s))\, ds + \int_{t/2}^t A e^{-(t-s)A} \{ f(u(s)) - f(u(t)) \}\, ds$$
$$+ (I - e^{-\frac{t}{2}A}) f(u(t))$$

$$g(t)^{1-\theta}e^{\lambda t}\|(I-e^{-\frac{t}{2}A})f(u(t))\|_p \leqq C_{17}$$

$$g(t)^{1-\theta}e^{\lambda t}\int_0^{t/2}\|Ae^{-(t-s)A}f(u(s))\|_p\,ds \leqq C_{18}$$

がわかる．（3.6）より

$$\int_{t/2}^{t}\|Ae^{-(t-s)A}\{f(u(s))-f(u(t))\}\|_p\,ds$$

$$\leqq C_3C_{13}\,g\left(\frac{t}{2}\right)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}}e^{-\lambda t}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-1+\delta}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds$$

$$+C_3C_{14}\,g\left(\frac{t}{2}\right)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}e^{-\lambda t}\int_{t/2}^{t}(t-s)^{-\alpha}e^{-\lambda(\nu-1)s}ds$$

$$\leqq C_{19}\,g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}}e^{-\lambda t}+C_{20}\,g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)}e^{-\lambda t}$$

であるから（3.7）が成立する．（3.8）は（P$'$），補題2.3よりいえる．

（定理２の証明）　$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)>0$ のとき：Cを

$$C_8(2C)^{\nu-1}<1$$

を満たすようにとり，次にϕを

$$C_3\|A^\theta\phi\|_p \leqq C-C_8C^\nu$$

が成立するようにすると $g(T)=1$ として（3.3$'$），（3.5）が成り立つ．従って $T=\infty$ ととることができる．

$1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)=0$ のとき：上と同様にCをとり

$$\sup_{0<t\leqq T} g(t)^{\alpha-\theta}e^{\lambda t}\|A^\alpha e^{-tA}\phi\|_p \leqq C_3\|A^\theta\phi\|_p$$

だから

$$C_3\|A^\theta\phi\|_p \leqq C-C_8C^\nu$$

とϕをとれば，Tの大きさを絞る必要はない．

§4. $\mathrm{Re}\,\sigma(A) \ni 0$ の場合

$\sigma_1 = \sigma(A) \cap \{z : \mathrm{Re}\, z < 0\}$, $\sigma_2 = \sigma(A) \cap \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$ とおく．σ_1 は有限集合である．

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (z - A)^{-1}\, dz, \quad P_2 = I - P_1$$

と定義する．但し Γ は σ_1 を内部に含み $\sigma(A) \setminus \sigma_1$ を外部におく単純閉曲線である．$k = 1, 2$ に対して P_k は $X = L^p(\Omega)$ 上の射影作用素となる．$X_k = P_k L^p(\Omega)$ とし，

$$A_k \equiv A|_{X_k}, \ \sigma(A_k) = \sigma_k, \quad k = 1, 2$$

として $A = A_1 + A_2$ と分解できる．X_1 は有限次元であるから，$-A_1$ は有界作用素で群 e^{-tA_1} $(t \in \mathbb{R})$ を生成し，$-A_2$ は解析的半群 e^{-tA_2} $(t \geqq 0)$ を生成する．(P') は

$$\begin{cases} (u_k)_t + A_k u_k = P_k f(u), & t > 0 \\ u_k(0) = \phi_k \end{cases}$$

と分解される $(k = 1, 2)$．ここで $u_k = P_k u$, $\phi_k = P_k \phi$．よって (IE) は $k = 1, 2$ に対し

$$u_k(t) = e^{-tA_k}\phi_k + \int_0^t e^{-(t-s)A_k} P_k f(u(s))\, ds, \quad t > 0$$

となる．

$C_{21} > 0$ を適当にとり $\tilde{A} \equiv A + C_{21} I$ と定義し，$\mathrm{Re}\,\sigma(\hat{A}) > 0$ となるようにする．

次のことに注意しておく．$C_{22} > 0$, $\omega > 0$ が存在して任意の $v \in L^p(\Omega)$, $\gamma \geqq 0$ に対して

$$
(4.1)\quad \left.\begin{array}{l} \|\tilde{A}^{\gamma}e^{-t\tilde{A}}v\|_p \\ \|\tilde{A}^{\gamma}e^{-tA_2}v\|_p \end{array}\right\} \leqq C_{22}t^{-\gamma}e^{-\omega t}\|v\|_p \leqq C_{22}g(t)^{-\gamma}e^{-\omega t}\|v\|_p,\ t>0
$$

$$
\|\tilde{A}^{\gamma}e^{-tA_1}v\|_p \leqq C_{22}e^{\omega t},\quad t<0
$$

定理3をより詳しく述べそれを定理4.1とする．この節は定理4.1を証明する．

定理4.1　以下を満足する安定多様体Mが存在する：

(i) $M=\{w_1+w_2 : w_k\in P_kD(\tilde{A}^{\theta}),\ w_1=\Phi(w_2),\ \Phi\text{は連続}\}$

(ii) $\phi\in M$ ならば（IE）の大域解 u が存在し

$$
\|\tilde{A}^{\alpha}u(t)\|_p \leqq C_{23}\,g(t)^{-(\alpha-\theta)}e^{-\omega t}\quad \textit{for all}\ \ t>0
$$

$$
\|\tilde{A}^{\theta}u(t)\|_p \leqq C_{24}\,e^{-\omega t}\quad \textit{for all}\ t\geqq 0
$$

(iii) $\phi\in M$ ならば 任意の $t\geqq 0$ に対し $u(t)\in M$.

(iv) u を（IE）の大域解で(ii)の評価をもつとする．

$\|\tilde{A}^{\theta}P_2\phi\|_p\leqq C_{25}$ ならば $\phi\in M$ である．

$\psi\in P_2D(\tilde{A}^{\theta})$，$t>0$ に対して積分方程式

$$
(4.2)\quad v(t)=e^{-tA_2}\psi-\int_t^{\infty}e^{-(t-s)A_1}P_1f(v(s))\,ds + \int_0^t e^{-(t-s)A_2}P_2f(v(s))\,ds
$$

を考える．

補題4.2　$\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p$ が十分小さいとき（4.2）の大域解 $v(t;\psi)$ が存在し，$v\in C((0,\infty);D(\tilde{A}^{\alpha}))$ で一意．さらに任意の $\beta\in[\theta,1)$ に対して

$$\|\tilde{A}^{\beta} v(t;\psi)\|_p \leqq C_{26}(\beta)\, g(t)^{-(\beta-\theta)} e^{-\omega t}, \quad t>0$$

（証明） 定理１と同じ様に任意の $\beta\in[\theta,1)$ に対して次の空間を定義する：

$$E_\beta \equiv \{v\in C((0,\infty);D(\tilde{A}^{\beta})) : \sup_{0<t<\infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t}\|\tilde{A}^{\beta} v(t)\|_p<\infty\}$$
$$= \{v : g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} v(t) \in B((0,\infty);D(\tilde{A}^{\beta}))\}$$

E_β は $|||v|||_\beta \equiv \sup_{0<t<\infty} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t}\|\tilde{A}^{\beta} v(t)\|_p$ をノルムとしてBanach空間になる．E_α の閉球

$$B \equiv \{v\in E_\alpha : |||v|||_\alpha \leqq C\}$$

を考え，$v\in B$ に対して写像 F を

$$(4.3)\qquad Fv(t) \equiv e^{-tA_2}\psi - \int_t^\infty e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\,ds + \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s))\,ds, \quad t>0$$

と定義する．

(i) $\tilde{A}^{\beta} Fv(t)$ は $t\in(0,\infty)$ について（Hölder-）連続であることを示す．次のことに注意する：

$$(4.4)\qquad \begin{cases} \tilde{A}^{\gamma} e^{-tA_k} = e^{-tA_k}\tilde{A}^{\gamma} \ \text{on}\ D(\tilde{A}^{\gamma}), \quad k=1,2 \\ \|(e^{tA_1}-I)v\|_p \leqq C_{27}(1-e^{-\omega t})\|v\|_p, \quad v\in P_1L^p(\Omega),\ t>0 \\ \|(e^{-tA_2}-I)v\|_p \leqq C_{28}\, t^{\gamma}\|\tilde{A}^{\gamma} v\|_p, \quad v\in D(\tilde{A}^{\gamma}),\ t>0 \end{cases}$$

$0<t<t+h<\infty$，$\delta\in(0,1-\beta)$ とする．

$$\|\tilde{A}^{\beta} Fv(t+h) - \tilde{A}^{\beta} Fv(t)\|_p$$
$$\leqq \|(e^{-hA_2}-I)\tilde{A}^{\beta} e^{-tA_2}\psi\|_p$$
$$+ \int_t^{t+h} \|\tilde{A}^{\beta} e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\|_p\,ds$$

$$+ \int_{t+h}^{\infty} \| (e^{hA_1} - I)\tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_1} P_1 f(v(s)) \|_p \, ds$$
$$+ \int_{t}^{t+h} \| \tilde{A}^{\beta} e^{-(t+h-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p \, ds$$
$$+ \int_{0}^{t} \| (e^{-tA_2} - I)\tilde{A}^{\beta} e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s)) \|_p \, ds$$
$$\leqq C_{29} h^{\delta} g(t)^{-(\beta+\delta-\theta)} e^{-\omega t} + C_{30} h^{\delta} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$
$$+ C_{31} h^{1-\beta} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$

(ii) $F : B \to B$ であることを調べる．(4.3) より $v \in B$ のとき

$$g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \| \tilde{A}^{\beta} F v(t) \|_p$$
$$\leqq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \psi \|_p$$
$$+ C_5 C_{22} \| P_1 \| C^{\nu} g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega\nu s} ds$$
$$+ C_5 C_{22} \| P_2 \| C^{\nu} g(t)^{\beta-\theta} \int_0^{t} g(t-s)^{-\beta} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds$$

ここで

$$g(t)^{\beta-\theta} e^{\omega t} \int_t^{\infty} e^{\omega(t-s)} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega\nu s} ds$$
$$\leqq \int_0^1 s^{-(\alpha-\theta)\nu} ds + \int_1^{\infty} e^{-\omega(\nu-1)s} ds$$

また補題2.4より

$$g(t)^{\beta-\theta} \int_0^t g(t-s)^{-\beta} g(s)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega(\nu-1)s} ds$$
$$\leqq C_{32}(\beta)\, g(t)^{1-\alpha\nu+\theta(\nu-1)} \leqq C_{32}(\beta)$$

であるから

$$||| F v |||_{\beta} \leqq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \psi \|_p + C_{33}(\beta) C^{\nu}$$

特に $\beta = \alpha$ とおいて

$$||| F v |||_{\alpha} \leqq C_{22} \| \tilde{A}^{\theta} \psi \|_p + C_{34} C^{\nu}$$

を得る．C のとり方として

(4.5) $C_{34}(2C)^{\nu-1} < 1$

とし，ψを $C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p \leqq C - C_{34}C^{\nu}$ とすると $|||Fv|||_{\alpha} \leqq C$ すなわち $F: B \longrightarrow B$である．

(iii) FはB上の*strictly contraction*であることを示す．$v, w \in B$ とする．(4.3)より

$$|||Fv - Fw|||_{\alpha} \leqq C_{34}(2C)^{\nu-1}|||v - w|||_{\alpha}$$

(4.5)より示すことができた．FはB内に一意の不動点vをもち(4.2)を満足する．$g(t)^{\alpha-\theta}e^{\omega t}v(t) \in B((0,\infty); D(\tilde{A}^{\alpha}))$.

上の計算からわかるように

$$|||v|||_{\beta} \leqq C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p + C_{33}(\beta)C^{\nu}$$

特に$\beta = \alpha$のとき $t > 0$に対し

$$\|\tilde{A}^{\alpha}v(t)\|_p \leqq C\,g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}e^{-\omega t}$$

また$\beta = \theta$のとき $t \geqq 0$ に対し

(4.6) $\|\tilde{A}^{\theta}v(t)\|_p \leqq (C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}\psi\|_p + C_{35}C^{\nu})e^{-\omega t}$

補題4.3　$v(t;\psi)$は

$$\begin{cases} u_t + Au = f(u) \\ u(0) = \psi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(v(s;\psi))\,ds \end{cases}$$

を満足する．

(証明)　積分方程式として考える．(4.2)を変形して

$$v(t) = e^{-tA_1}P_1\left(\psi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(v(s))\,ds\right)$$

$$+ e^{-tA_2} P_2 \left(\psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s))\, ds \right)$$
$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s))\, ds$$
$$+ \int_0^t e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s))\, ds$$

多様体M, M(C)を

$$M = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds \ :\ \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ v : (4.2) \text{ の解} \\ |||v|||_\alpha : \text{有界} \end{array} \right\}$$

$$M(C) = \left\{ \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds : \begin{array}{l} \psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta) \\ C_{22} \|\tilde{A}^\theta \psi\|_p \leqq C - C_{34} C^\nu \\ v : (4.2) \text{の解},\ |||v|||_\alpha \leqq C \end{array} \right\}$$

と定義する. 明らかに $0 \in M(C) \subset M$.

<u>補題4.4</u>　$u(t;\phi)$を(IE)((P′))の大域解とする.

(i) $\phi \in M$ならばすべての$t \geqq 0$に対し$u(t;\phi) \in M$.

(ii) $\phi \in M(C)$ならば$T_1 \in [0,\infty)$が存在してすべての$t \geqq T_1$に対して$u(t;\phi) \in M(C)$.

(証明)　$\phi \in M$とする. $\psi \in P_2 D(\tilde{A}^\theta)$として

$$\phi = \psi - \int_0^\infty e^{sA_1} P_1 f(v(s;\psi))\, ds$$

と表される. (P′)の解はBで一意である. 補題4.3より任意の$t \geqq 0$に対して$u(t;\phi) = v(t;\psi)$. $\tau > 0$を任意にとり固定し$t \geqq 0$に対して

$$w(t) \equiv v(t+\tau;\psi)$$

と定義する．

$$
\begin{aligned}
w(t) = {} & e^{-(t+\tau)A_2}\psi \\
& - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s;\psi))\,ds \\
& + \int_{0}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds \\
= {} & e^{-tA_2}\left\{e^{-\tau A_2}\psi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds\right\} \\
& - \int_{t+\tau}^{\infty} e^{-(t+\tau-s)A_1} P_1 f(v(s;\psi))\,ds \\
& + \int_{\tau}^{t+\tau} e^{-(t+\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds \\
= {} & e^{-tA_2}\left\{e^{-\tau A_2}\psi + \int_0^{\tau} e^{-(\tau-s)A_2} P_2 f(v(s;\psi))\,ds\right\} \\
& - \int_{t}^{\infty} e^{-(t-s)A_1} P_1 f(v(s+\tau;\psi))\,ds \\
& + \int_{0}^{t} e^{-(t-s)A_2} P_2 f(v(s+\tau;\psi))\,ds
\end{aligned}
$$

よって w は (4.2) で ψ の代わりに $P_2 v(t;\psi)$ としたものを満足する．すべての $t \geqq 0$ に対して

$$v(t+\tau;\psi) = w(t) = v(t;P_2 v(\tau;\psi))$$

従って

$$
\begin{aligned}
u(\tau;\phi) &= v(\tau;\psi) = w(0) \\
&= P_2 v(\tau;\psi) - \int_0^{\infty} e^{sA_1} P_1 f(v(s;P_2 v(\tau;\psi)))\,ds
\end{aligned}
$$

また $P_2 v(\tau;\psi) \in P_2 D(\tilde{A}^{\theta})$ である．よって (i) が成立する．$u(t;\phi) = v(t;\psi)$ だから u も補題4.2の評価 (4.6) を満足する．よって $T_1 \in [0,\infty)$ が存在して

$$C_{22}\|\tilde{A}^{\theta} P_2 v(t;\psi)\|_p \leqq C - C_{34} C^{\nu}, \quad t \geqq T_1$$

とすることができ，(ii) が成り立つ．

<u>補題4.5</u>　u は（IE）（（P′））の大域解で，補題4.2と同じ評価をもつとする．$C_{22}\|\tilde{A}^{\theta}P_2\phi\|_p \leqq C - C_{34}C^{\nu}$ ならば，$\phi \in M(C)$ である．

（証明）　$P_1u(t) = e^{-tA_1}P_1\phi + \int_0^t e^{-(t-s)A_1}P_1 f(u(s))ds$

(4.1) 及び $e^{sA_1}P_1 f(u(s))$ は $(0,\infty)$ 上で可積分であるから

$$e^{tA_1}P_1u(t) = P_1\phi + \int_0^t e^{sA_1}P_1 f(u(s))\,ds \longrightarrow 0 \quad (t\to\infty)$$

従って

$$P_1\phi = -\int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(u(s))\,ds$$

でなくてはならない．$u(t;\phi) = v(t;\psi)$ から

$$\phi = v(0;\psi) = \psi - \int_0^{\infty} e^{sA_1}P_1 f(v(s;\psi))\,ds$$

また $P_2\phi = \psi$ より $\phi \in M(C)$ である．

なお $\psi_1,\psi_2 \in P_2D(\tilde{A}^{\theta})$ とし，$v_1(t;\psi_1)$，$v_2(t;\psi_2)$ を (4.2) の大域解とすると

$$|||v_1 - v_2|||_{\alpha} \leqq C_{36}\|\tilde{A}^{\theta}\psi_1 - \tilde{A}^{\theta}\psi_2\|_p$$

となり定理4.1(i)がいえる．

<u>命題4.6</u>　$v\in B$ を (4.2) の大域解とし，$0<t<t+h<\infty$，$\delta\in(0,1-\alpha)$ とする．

(i) $\|\tilde{A}^{\alpha}v(t+h) - \tilde{A}^{\alpha}v(t)\|_p$

$$\leqq C_{37}h^{\delta}\left[\gamma(t)^{-(\alpha+\delta-\theta)} + \gamma(t)^{-(\alpha-\theta)\nu}\right]e^{-\omega t}$$

$$+ C_{38} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)\nu} e^{-\omega t}$$

(ii) $\| f(v(t+h)) - f(v(t)) \|_p$

$$\leqq C_{39} h^{\delta} \left[g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega\nu t}$$

$$+ C_{40} h^{1-\alpha} g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} e^{-\omega\nu t}$$

(iii) $\| \tilde{A} v(t) \|_p$

$$\leqq C_{41} \left[g(t)^{-(1-\theta)} + g(t)^{-\{(\alpha-\theta)\nu+\delta\}} + g(t)^{-(\alpha-\theta)(2\nu-1)} \right] e^{-\omega t}$$

以上の結果の証明などの詳細は Hoshino - Yamada [11] を参照していただきたい。

文　献

1. A. Friedman; Remarks on nonlinear parabolic equations, Proc. Symp. Appl. Math. 17 (1965), 3-23.

2. Y. Hashimoto, Y. Niikura and Y. Yamada; Stability and instability for semilinear parabolic equations with free boundary conditions, Nonlinear Analysis 8 (1984), 683-694.

3. D. Henry; Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Math. 840, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

4. M. Ito; The conditional stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA 25 (1978), 263-275.

5. H. Kielhöfer; On the Lyapunov-stability of stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Differential Equations 22 (1976), 193-208.

6. A. Pazy; A class of semi-linear equations of evolution, Israel J. Math. 20 (1975), 23-36.

7. A. Pazy; Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Appl. Math. Sci. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

8. F. Rothe; Global Solutions Of Reaction-Diffusion Systems, Lecture Notes in Math. 1072, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

9. 田辺広城 関数解析 上，下 実教出版，1978，1981.

10. F. Weissler; Local existence and nonexistence for semilinear parabolic equations in L^p, Indiana Univ. Math. J. 29 (1980), 79-102.

11. H. Hoshino and Y. Yamada; Global solutions for semilinear parabolic equations of higher order.（準備中）